

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2022-2023 уч.год
10 класс

1. Существует ли целое значение a , при котором уравнение

$$x^2 - 2023x + 2022a + 1 = 0$$

имеет целый корень?

(Найдите все такие целые значения a или докажите, что их нет.)

2. При всех неотрицательных a, b докажите неравенство

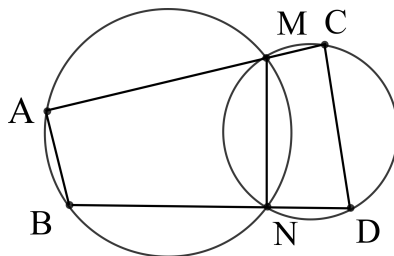
$$a^2 + ab + b^2 \leq 3(a - \sqrt{ab} + b)^2$$

3. Точки прямой окрашены в два цвета (каждый цвет присутствует, каждая точка имеет ровно один цвет). Докажите, что найдутся три точки одного цвета, такие, что одна лежит ровно посередине между двумя другими.

4. Две окружности пересекаются в точках M и N . Через точку M проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке A , вторую окружность в точке C . Через точку N проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке B , вторую окружность в точке D . Докажите, что

$$\sphericalangle AM + \sphericalangle MC = \sphericalangle BN + \sphericalangle ND$$

где $\sphericalangle AM, \sphericalangle MC, \sphericalangle BN, \sphericalangle ND$ – угловые величины дуг, показанных на рисунке (выбираются дуги, не содержащие точек второй прямой).



5. Стая, в которой 64 воробья, рассаживается по деревьям. Далее, серией перелетов, стая меняет размещение на деревьях. Если на каком-то дереве оказывается не менее половины всех птиц, то с него на каждое из остальных деревьев перелетает ровно столько воробьев, сколько уже сидит на этом дереве (и это считается за один перелет). Если в какой-то момент на двух деревьях окажется по 32 воробья, то они перелетают с какого-то одного дерева по такому же правилу. Первоначально воробьи так расселись по деревьям, что стае пришлось сделать 6 перелетов, и после этого стая успокоилась. Докажите, что все воробьи собрались на одном дереве.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.

Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.

Не забудьте обосновать свои решения задач!